

Problème 323 – Scrat et le gland glissant

Niveau : Licence/CPGE Maths (accessible pour les élèves de Terminale plus avancés)

Chapitres : Suites

Inédit, publié le 18/08/2022



Scrat, le petit écureuil de la franchise « L'Âge de Glace » commencée en 2002, a longtemps couru derrière son gland favori, sans jamais pouvoir l'atteindre. En avril 2022, dans une courte vidéo finale publiée par ses créateurs (https://www.youtube.com/watch?v=yb87kRJ_7-g), Scrat atteignait enfin son rêve et mangeait le fruit. Mais ce ne fut pas sans douleur, car très longtemps le gland lui a échappé, comme dans le problème qui suit.

Un jour, Scrat avait ainsi fait face à un gland « glissant ». Situé initialement à 3 mètres du fruit, Scrat fit un seul long bond pour l'attraper. Mais au moment où il sauta dessus, le gland lui échappa et avança de 1,5 mètres. Scrat refit un bond sur le fruit mais une fois encore, le gland glissa et avança de 0,75 mètres. Puis, à chaque fois que Scrat sautait sur le gland, ce dernier s'échappait et avançait, de la moitié de la distance séparant l'écureuil et le gland avant ce saut - en supposant que les deux avancent le long d'un axe gradué en mètres.

On appelle respectivement (u_n) et (v_n) les suites associées aux distances respectives, après n sauts de Scrat, du gland et de l'écureuil par rapport à la position initiale de l'écureuil.

On a ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{u_n - v_n}{2} \\ v_{n+1} = u_n \end{cases} \text{ avec } u_0 = 3 \text{ et } v_0 = 0$$

1) Montrer que l'étude de la suite (u_n) se ramène à l'étude de la suite récurrente linéaire :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \text{ pour } n \geq 0.$$

2) Démontrer en utilisant une récurrence double que pour tout $n \geq 0$: $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

3) Retrouver le même résultat en utilisant les propriétés sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4) Déterminer autour quelle position le gland s'est finalement stabilisé après un très grand nombre de sauts de Scrat.

5) Imaginons maintenant que le gland qui échappait à Scrat au moment où il lui sautait dessus aurait avancé du $m^{\text{ème}}$ de la distance (au lieu de la moitié) entre l'écureuil et le gland avant le saut.

Montrer que la position autour de laquelle se serait stabilisé le gland après un très grand nombre de sauts de Scrat est égale à $3 \frac{m}{m-1}$ mètres par rapport à la position de départ de Scrat.